Trainingsaufgaben – Teil 1

Update am 13.02.2015 mit reduziertem Aufgabenumfang und Ergebnisangaben

Bitte bei Bedarf auch die ausführlich beschriebenen Lösungsverfahren in den Skripten ansehen.

Bei vielen Aufgaben kann man selbst die Probe durchführen!

Aufgabe 1

Fassen Sie soweit möglich zusammen:

$$54\cdot 3^{k-3}+2\cdot 3^{k+2}-24\cdot 3^{k-1}-4\cdot 3^{k+1}$$

In Übungen behandelt, nützlich auch ueb_03.pdf mit LV, Aufgabe 2b

Aufgabe 2

Vereinfachen Sie:

a) $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^4}-\dfrac{(a^3+b^2)^2}{(a^2\cdot b)^2}$, b) $a,\ b\ \neq 0$

In Übungen behandelt, nützlich auch ueb_03.pdf mit LV, Aufgabe 2b, und ueb_01.pdf mit LV, Aufgabe 6

Aufgabe 3

Vereinfachen Sie soweit möglich:

a) $\left[(x^2-y^2)^3\right]^4:(x-y)^{12}$, b) $\left[(m+n)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[(m+n)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{4}}$, c) $\left[(a^2-x^2)^{-3}\right]^{-2}\cdot\left[(a+x)(a-x)\right]^{-5}$

In Übungen behandelt, nützlich auch ueb_03.pdf mit LV, Aufgabe 2b

Aufgabe 4

Vereinfachen Sie

a) $\dfrac{y\cdot(2s^2-4y^2)}{\sqrt{s^2-y^2}}-8y\sqrt{s^2-y^2}$

b) $\left(a^{n+1}\cdot b^{x-1}+a^n\cdot b^x+a^{n-1}\cdot b^{x+1}\right):\left(a^{n-2}\cdot b^{x-1}\right)$

c) $\sqrt{6z^2-6}\cdot\sqrt{\dfrac{3z-3}{2z+2}}$

d) $\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a^2}}$

In Übungen behandelt, nützlich auch ueb_03.pdf mit LV, Aufgabe 2b und ueb_01.pdf mit LV, *Aufgabe 6*

Aufgabe 5

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen zu

a) $-2\cdot x^2+6\cdot x+20=0$, b) $u^4+12u^2+36=0$

In Übungen behandelt

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die reellen Lösungen zu

a) $y^2+y+1\geq 0$, b) $\frac{s-1}{1+s}<1$, c) $v^2 < 6+v$

In Übungen behandelt, siehe auch ueb_03.pdf mit LV, Aufgabe 5, teilweise andere Variablenbezeichnungen

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die reellen Lösungen:

a) $\frac{5(x-2)+9}{(x+1)(x-2)-x(x+5)}$, b) $x^4-13x^2+36=0$, c) $-2x^3+8x^2=8x$

In Übungen behandelt, siehe auch ueb_01.pdf mit LV, Aufgabe 4,

Aufgabe 8

Lösen Sie Wurzelgleichungen:

a) $\sqrt{x^2+4}=x-2$, b) $\sqrt{x-1}=\sqrt{x+1}$, c) $\sqrt{2x^2-1}=0$

In Übungen behandelt

Aufgabe 9

Vereinfachen Sie durch Anwendung der Potenzgesetze:

a) $\frac{4\cdot(12^5)^4\cdot 162^4}{3^{-2}\cdot(2\cdot 3^2)^{18}\cdot 16^6}$

b) $\frac{(rs+rt)^{m+3}\cdot u^{m+1}}{(rsu+rut)^{m-2}}$

c) $\left(\frac{25x^2-4y^2}{a^2-25b^2}\right)^n \cdot \left(\frac{a^2-10ab+25b^2}{5ax-2ay-25bx+10by}\right)^n$

Selbst versuchen, nützlich auch ueb_03.pdf mit LV, Aufgabe 2,

Aufgabe 10

Vereinfachen Sie:

a) $\sqrt{a^2b^3} \cdot \sqrt[4]{b^9} \cdot \sqrt[3]{a^2}$, b) $\sqrt[n]{x^{n+2}} \cdot \sqrt[3]{x^{2n-1}} \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^{n-2}$, c) $x+\sqrt{x^2-2x+1}$

In Übung behandelt

Aufgabe 11

Machen Sie folgende Brüche rational:

a) $\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$, b) $\frac{\sqrt{4-\sqrt{15}}}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}$, c) $\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-\sqrt{2}}$, d) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}$, e) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

In Übung behandelt

Aufgabe 12

Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion $f(x)=\frac{3\cdot x^2-2}{x^3+2\cdot x^2-8\cdot x}$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen des Zählerpolynoms.
b) Bestimmen Sie die Nullstellen des Nennerpolynoms.
c) Wo liegen die Nullstellen von f(x)?

In Übung behandelt

~~d) Für welche Werte von x wächst der Funktionswert f(x) über alle Grenzen?~~
~~e) Gegen welchen Wert strebt~~ $f(x\to-\infty)$ ~~?~~
~~f) Gegen welchen Wert strebt~~ $f(x\to+\infty)$ ~~?~~

~~**Aufgabe 13**~~

~~Bestimmen Sie zu~~ $f(x)=\frac{x^2-2}{x+3}$ ~~die Asymptotenfunktion g(x) als Annäherungsfunktion für~~ $x\to\pm\infty$ ~~.~~

Aufgabe 14

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die reellen Lösungen:

a) $\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{1-2x}{1-x^2}$, b) $\frac{5x-5}{x+1}+2=\frac{6x-3}{2x-1}+4$, c) $\frac{x}{x-2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2x-4}$

a) in Übungen behandelt, b) und c) selbst versuchen

Aufgabe 15

Reelle Lösungen: a) $\frac{|x-1|}{|x+1|}<\frac{3}{2}$, b) $\frac{1+|x|}{1-|x|}<2$

In Übungen behandelt, nützlich hier auch ueb_01.pdf mit LV, Aufgabe 3, Fallunterscheidungen durchführen!

Aufgabe 16
Definitionsbereich und reelle Lösungen:

a) $\frac{3}{x+4}<0$, b) $\frac{3-x}{x-2}>\frac{x+4}{2(x-2)}$

In Übungen behandelt, nützlich hier auch ueb_01.pdf mit LV, Aufgabe 5 Fallunterscheidungen durchführen!

Aufgabe 17
Reelle Lösungen:
a) $2x-8>|x|$, b) $\frac{|x-3|}{x+3}>2$
Selbst versuchen

~~**Aufgabe 18**~~
~~Zeigen Sie, dass~~

~~a)~~ $\sqrt{7}$ ~~nicht durch einen rationalen Ausdruck (einen Bruch) darstellbar ist,~~

~~b) die Menge der Primzahlen unendlich viele Elemente enthält.~~

~~**Aufgabe 19**~~
~~Zeigen Sie, dass gilt:~~

~~a)~~ $1+3+5+...+(2n-3)+(2n-1)=n^2$

~~b)~~ $2+4+6+(2n-2)+2n=n(n+1)$

Aufgabe 20

Gegeben sind die beiden Spaltenvektoren im x-y-Koordinatensystem $a=[1,-2]^T$ und $b=[-3,1]^T$.

a) Skizzieren Sie a und b im x-y-Koordinatensystem. Dabei auf vollständige Beschriftung achten:
   - Achsenskalierung
   - Achsenbeschriftung
   - Was wird dargestellt?

b) Berechnen Sie die Normen der Vektoren und die Winkel mit der positiven x-Achse.

~~c) Welchen Winkel schließen~~ a ~~und~~ b ~~ein (den kleineren angeben)?~~

~~d) Berechnen Sie aus den Ergebnissen zu Punkt b) die Komponenten der Vektoren~~ a ~~und~~ b ~~. Vergleich mit den Vorgaben?~~

e) Bilden Sie das Skalarprodukt $c=a\cdot b$.

~~f) Bestimmen Sie mit dem Skalarprodukt c aus Punkt e) den Winkel zwischen den Vektoren~~ a ~~und~~ b ~~. Vergleich mit Ergebnis aus Punkt b)?~~

~~Hinweis: Winkel zwischen Vektoren sind aus~~ $a\cdot b=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos(\phi)$ ~~bestimmbar.~~

In Übungen behandelt, siehe auch ueb_05.pdf mit LV, Aufgabe 1

Aufgabe 21

Gegeben sind die beiden Vektoren $u=[1,-1,\ 2,-2,\ 3]$ und $v=[3,\ 2,-3,\ 5,-1]$.

a) Norm (Länge) von u?

b) Norm (Länge) von v?

c) Bestimmen Sie das Skalarprodukt von u und v.

d) Bestimmen Sie das Kreuzprodukt aus u und v (wenn möglich!).

In Übungen behandelt, siehe auch ueb_05.pdf mit LV, Aufgabe 2

Aufgabe 22

Zeigen Sie,

a) dass der Vektor $c=a\,x\,b$ ($a=[-1,2,3]$, $b=[2,1,-4]$) auf a und b senkrecht steht.

a) dass der Vektor $d=b\,x\,a$ ebenfalls auf a und b senkrecht steht. Vergleichen Sie die Beträge der Komponenten von c und d und deren Vorzeichen.

Hinweis: Zwei Vektoren stehen aufeinander senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist.

Siehe ueb_05.pdf mit LV, Aufgabe 6

Aufgabe 23

Bestimmen Sie **alle** zu x, $x \neq 0$, inversen Elemente a der endlichen Menge

$Z_{11} = \{x,\ x = \{0,1,2,\ \ldots,\ 10\}\}$, also mit der Eigenschaft $x \cdot a \ \mathrm{MOD}\ 11 = 1$.

Hinweis: verwenden Sie eine Multiplikationstabelle und schauen Sie sich die Ergebnisse an.

In Übungen behandelt, siehe auch ueb_02.pdf mit LV, Aufgabe 3 und 4

~~**Aufgabe 24** (9 P)~~

~~Gegeben ist die Betragsfunktion~~ $y = \frac{|x-1|}{|x+1|}$ ~~als Näherung für den Frequenzgang eines Equalizers, z. B. des Real-Players. Der Verlauf von y gestattet die Beurteilung des „Durchlassbereichs".~~

a) ~~Welche Polstellen hat y? Die Lage entspricht der Durchlassfrequenz.~~
b) ~~Bestimmen Sie die Asymptoten von y.~~
c) ~~Zeichnen Sie grob den Graphen.~~
d) ~~Für welchen Wertebereich gilt~~ $\frac{|x-1|}{|x+1|} \geq 2$.

Aufgabe 25 (4 P)

Bestimmen Sie zur Matrix

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

die Inverse mit Hilfe des Verfahrens von Gauß-Jordan.

In Übungen behandelt

Aufgabe 26

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: det(B) =-20, siehe auch ähnliche, ausführliche Lösung in ueb_06.pdf mit LV, Aufgabe 3

Aufgabe 27

Welches der folgenden 3 linearen Gleichungssysteme ist

- eindeutig lösbar
- nicht eindeutig lösbar (d.h., das LGS hätte unendlich viele Lösungen)
- unlösbar

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Jeweils kurz begründen.

In Übungen behandelt: a) eindeutig lösbar, b) unlösbar, c) unendlich viele Lösungen

Aufgabe 28

Gegeben: $a = [2 \;\; -5 \;\; 3]^T$, $b = [4 \;\; 2 \;\; -2]^T$

a) Berechnen Sie das Skalarprodukt $a \cdot b$, oder auch $\langle a, b \rangle$ geschrieben.

b) Berechnen Sie das Kreuzprodukt $c = a \times b$.

*In Übungen behandelt, a) a * b = -8, c= [4 16 24], siehe auch ueb_05.pdf mit LV, Aufgabe 5*

~~**Aufgabe 29**~~ ~~(Definitionsformel für Determinanten)~~

~~(Schwer, nicht klausur-relevant, versuchen Sie es zum Training dennoch …)~~

~~Determinanten quadratischer Matrizen sind skalare Größen (=einfache Zahlen im Gegensatz zu vektoriellen Größen), die sich aus einer n x n-Matrix~~

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

~~über den Ausdruck~~

$$\det(A) = \sum_{\text{alle Permutationen von } \alpha\ \beta\ \gamma\ \dots\ \omega} (-1)^k \cdot a_{1\alpha} \cdot a_{2\beta} \cdot a_{3\gamma} \cdot \ \dots\ \cdot a_{n\omega}$$

~~mit~~ $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, ... , $\omega = n$

~~k → Anzahl der Inversionen (= Vertauschungen gegenüber der Ausgangsreihenfolge~~

$\alpha\ \beta\ \gamma\ \dots\ \omega$)

~~berechnen lässt.~~

a) ~~Wie viele Permutationen der Zweit-Indices~~ $\alpha\ \beta\ \gamma\ \dots\ \omega$ ~~gibt es bei~~ $\omega = n$?

b) ~~Bestätigen Sie über die oben angegebene allgemeine Definition die Merkregel für Determinanten von 2x2-Matrizen~~

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} ,$$

c) ~~Bestätigen Sie die **Sarrus-Regel** für Determinanten von 3x3-Matrizen.~~

~~**Aufgabe 30**~~

a) ~~Wie viele Permutationen der Zweit-Indices gibt es bei einer 4 x 4-Matrix A?~~

b) ~~Stellen Sie zur Determinanten-Berechnung für A irgendwelche 6 Permutationen der Zweit-Indices auf. **Tipp:** Nicht zwingend, aber wegen der Systematik übersichtlich wird es, wenn man zuerst die beiden letzten Zweit-Indices vertauscht, dann den zweiten und dritten usw.~~

c) ~~Bestimmen Sie die Inversionen k zu jeder Permutation von b).~~

d) ~~Bestimmen Sie zu den Permutationen von b) die vorzeichenrichtigen Summenterme in det(A).~~

Aufgabe 31 (Unterdeterminanten)

Wenn eine n x n-Matrix auch Nullelemente besitzt, liefern die zugehörigen Terme in der Determinanten-Formel keine Beiträge.

a) Untersuchen Sie für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} ,$$

welche Summenterme in der Determinante det(A) herausfallen und markieren Sie die entsprechenden Matrixelemente.

b) Untersuchen Sie für die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} ,$$

welche Summenterme in der Determinante det(B) herausfallen und markieren Sie die entsprechenden Matrixelemente.

c) Untersuchen Sie für die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

welche Summenterme in der Determinante det(C) herausfallen und markieren Sie die entsprechenden Matrixelemente.

d) Was fällt Ihnen bei a), b) und c) zu den Positionen der markierten Elemente auf? **Hinweis:** Die markierten Elemente lassen sich einer Struktur zuordnen, die man als Unter-Matrizen der jeweiligen 0-Elemente bezeichnet.

Siehe ueb_07.pdf mit LV, Aufgabe 3

Aufgabe 32 (Vereinfachung der Determinanten-Berechung durch Erzeugen von Nullelementen)

Gegeben ist die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie det(P).

b) Erzeugen Sie durch elementare Operationen aus P die Matrix Q , deren mittleres Element „0“ ist.

c) Bestimmen Sie det(Q).

d) Erzeugen Sie durch elementare Operationen aus P die Matrix R , deren linkes unteres Element „0“ ist.

e) Bestimmen Sie det(R).

f) Erzeugen Sie aus P eine rechte obere Dreiecksmatrix S und bestimmen Sie det(S).

g) Was fällt Ihnen bei den Determinanten auf?

h) Wie wirken sich die „0“-Elemente in der Sarrus-Regel aus?

Siehe ueb_07.pdf mit LV, Aufgabe 4

Aufgabe 33 (Matrix-Addition)

Gegeben sind

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

a) Bilden Sie die Summen $C = A+B$ und $D = B+A$.

b) Weisen die Ergebnisse von a) darauf hin, dass für die Matrizen-Addition das Kommutativgesetz (=Vertauschbarkeit der Summanden) gilt?

Siehe ueb_07.pdf mit LV, Aufgabe 5

Aufgabe 34 (Matrix-Multiplikation)

Gegeben sind

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Produkt-Matrix $C = A \cdot B$.

b) Bestimmen Sie die Produkt-Matrix $D = B \cdot A$.

c) Erklären Sie die unterschiedlichen Ergebnisse zu a) und b).

d) Gilt für die Matrix-Multiplikation das Kommutativgesetz (=Vertauschbarkeit der Faktoren)?

Siehe ueb_07.pdf mit LV, Aufgabe 6

Aufgabe 35 (Matrix-Multiplikation)

Gegeben sind ein Spalten- und ein Zeilenvektor

$$a = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

a) Geben Sie die Dimensionen (Zeilenzahl x Spaltenzahl) von a und b an, wenn man sie als Matrizen interpretieren würde.

b) Bilden Sie das Produkt $C = b \cdot a$ **Hinweis:** Es gilt immer „Zeile x Spalte“. Aus wie viel Elementen besteht dann z. B. die erste Zeile von b und die erste Spalte von a?

c) Berechnen Sie det(C).

d) Berechnen Sie den Rang von C.

Siehe ueb_07.pdf mit LV, Aufgabe 7

Aufgabe 36 (Transponierte Matrizen)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} .$$

a) Bilden Sie die Transponierte A^T.

b) Berechnen Sie $B = A \cdot A^T$.

c) Was fällt Ihnen an der Struktur von B auf?

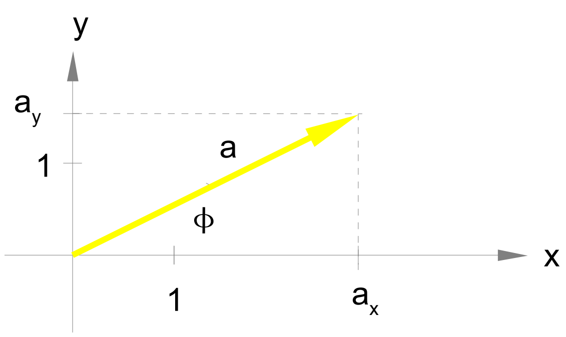
Siehe ueb_07.pdf mit LV, Aufgabe 8

~~**Aufgabe 37** (Vektoren)~~

~~Gegeben ist der zweidimensionale Spaltenvektor~~

$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$ ~~mit den Elementen~~ $a_x = 3$ ~~,~~ $a_y = 2$ ~~.~~

~~Man kann diesen abstrakten Vektor als gerichtete Größe in einem x-y-Koordinatensystem darstellen, wie es für viele physikalische Größen (Kräfte, Drehmomente, Temperaturgefälle, Geschwindigkeiten) üblich ist.~~



a) ~~Nennen Sie die 4 Eigenschaften, mit denen ein physikalischer Vektor vollständig beschrieben ist.~~

b) ~~Bestimmen Sie die Länge~~ $\|a\|$ ~~(=Euklidische Norm) des Vektors.~~

c) ~~Bestimmen Sie den Winkel~~ ϕ ~~(= griechisch „phi“) seiner Richtungslinie zur positiven x-Achse.~~

~~**Aufgabe 38** (Umrechnen der Vektor-Bestimmungselemente)~~

~~Gegeben ist ein Vektor b der Länge~~ $\|b\| = 5$ ~~. Seine Richtungslinie bildet mit der positiven x-Achse eines rechtwinkligen x-y-Koordinatensystems einen Winkel von 130°.~~

~~a) Bestimmen Sie die beiden Vektorelemente (=Koordinaten)~~ b_x, b_y.

~~b) Skizzieren Sie b im Koordinatensystem.~~

~~**Aufgabe 39** (Verändern eines Vektors durch Multiplikation mit einer quadratischen Matrix)~~

~~Gegeben ist der Spaltenvektor~~

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$ ~~und die Matrix~~ $$M = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$ ~~mit~~ $\alpha = 80°$.

~~a) Bestimmen Sie die Norm~~ $\|a\|$ ~~und den Winkel~~ ϕ ~~zur positiven x-Achse.~~

~~b) Bestimmen Sie den Vektor~~ $t = M \cdot a$.

~~c) Bestimmen Sie die Norm~~ $\|t\|$ ~~und den Winkel~~ θ ~~(griechisch „teta") zur positiven x-Achse.~~

~~d) Welchen Winkel bilden die beiden Vektoren r und t? Vergleichen Sie diesen mit~~ α.

~~e) Welche Wirkung hat die Multiplikation mit M auf die Norm und den Winkel von t?~~

~~f) Bestimmen Sie det(M).~~